زمینهٔ فرهنگی ریاضیات

تألیف ریموند. ل. وایلدر
ترجمهٔ مرتضی فتحی زاده

اشاره:

مؤلف در این مقاله درصدد اثبات این نکته است که ریاضی عنصری فرهنگی است و مانند سایر عناصر فرهنگی در شرایط خاص فرهنگی پدید می‌آید و رشد می‌کند. با این حال به‌نظر می‌آید که این عنصر فرهنگی برخلاف عناصر فرهنگی دیگر چون زبان، مذهب و لباس امری جهان‌شمول است؛ اما بررسیهای دقیق نشان می‌دهد که ریاضیات پدیده‌ای ذاتاً کلی و مطلق نیست بلکه تابع قوانین رشد و تأثیرپذیری از عناصر فرهنگی دیگر و بویژه متأثر از علوم و فنون است؛ درست مانند رشد شخصیت انسان که همه به ویژگیهای ذاتی و هم به موقعیت او در جامعه و فرهنگش بستگی دارد. از این رو تبیین دقیق ماهیت ریاضیات چندان آسان نیست. باری، ریاضیات چیزی است که ما با توجه به عوامل فرهنگی مؤثر در شکلگیری آن و با تلاش خود برای ساختن نظریه‌های جدید در پرتو نظریه‌های قدیمی به‌منظور حل مسائلی که به‌نظر ما در پیشبرد ریاضیات کنونی مهم‌اند، آن را می‌سازیم و تا هنگامی که آن را نساخته‌ایم وجود ندارد و حتی پس از ساختن آن نیز ممکن است در آینده دیگر ریاضیات محسوب نشود. چنانکه بسیاری از چیزهایی که در گذشته ریاضیات پنداشته می‌شد اکنون در قلمرو ریاضیات نمی‌گنجد.

۱. زمینهٔ فرهنگی

برای پرهیز از بدفهمی باید مقصودمان را از «فرهنگ» روشن کنیم. ما فرهنگ را به معنای کلی و انسان‌شناسانه به کار می‌بریم. چنانکه فرهنگ در عبارتهای «فرهنگ چینی» و «فرهنگ یونان باستان» نیز به همین معناست. فرهنگ بدین معنا، مجموعه‌ای از عادات و رسوم، عقاید، آداب، ابزار و آلات، سنتها و مانند اینها و نیز مجموعه‌ای از یک گروه مردم، چون یک قبیلهٔ سرخپوست، یا مردم منطقه‌ای خاص، چون آمریکاست. این معنای فرهنگ با معنای مورد نظر در عبارت «شخص با فرهنگ» متفاوت است.

ما انسانها در فرهنگها زاده شده‌ایم و همین فرهنگها هستند که با اثرگذاری بر سیستم عصبی گیرندهٔ ما و تعامل با آن، عادات، عقاید و سایر عناصر سازندهٔ «شخصیت» ما را تعیّن می‌بخشند. بیشتر چیزهایی که ما

آنها را مسلّم می‌انگاریم به وسیله فرهنگ تعیّن یافته‌اند؛ اما باید توجه داشت که یک فرهنگ بسی بیشتر از عادات، عقاید و مهارتهای فردی از افراد انسان است که تحت تأثیر فرهنگ می‌زید؛ زیرا معمولاً فرهنگ پیش از تولد آن فرد موجود بوده و پس از او نیز باقی است؛ گویی ممکن است در طول حیاتش دستخوش تغییر شود. هر شخص فقط پاره‌ای از «عناصر فرهنگی» را داراست، نه همهٔ آن را. به طوری که اگر او در یکی از شهرهای میانهٔ غربی آمریکا دیده بگشاید و بالد، ممکن است به یکی از فرقه‌های مسیحی بگرود (که معمولاً والدینش بدان گرویده‌اند)، به انگلیسی محاوره‌ای آن ناحیه سخن بگوید، پیشه‌ای چون افزارسازی را فراگیرد، ازدواج کند، خانواده تشکیل دهد و سرانجام در همان جا دیده از جهان فروبندد. بهترین دوستش نیز همین امور را تجربه خواهد کرد، جز آنکه ممکن است به فرقهٔ دیگری بگرود و پیشهٔ آهنگسازی را به جای افزارسازی برگزیند. باری، مهارت افزارسازی، مذهب، فنون آهنگسازی و غیره پیش از زاده شدن افراد مذکور وجود داشت و پس از آنها نیز همچنان تداوم دارد. اگر چه هر یک از این دو نفر به تنهایی ممکن است در ایجاد روشهای نوین افزارسازی، فنون جدید نواختن پیانو یا تدوین آهنگ سهیم باشند، گویی این امور «نو» حاصل تعامل عناصر فرهنگی با استعدادهای آنهاست. از این رو، احتمالاً آهنگ مذکور با گامی بی نیم‌پرده تدوین گردد و عناصر رایج شیوه تدوین آهنگ زمانش را دربرداشته باشد. تأثیر فرهنگ بر شیوهٔ لباس پوشیدن، غذا خوردن، تفریح و غیره چندان آشکار است که نیازی به گفتن نیست.

۲. جایگاه ریاضیات در فرهنگ

شخص افزارساز و دوست آهنگسازش درخصوص ریاضیات احتمالاً شمارش را پیش از ورود به دبستان و حساب را در آنجا فرامی‌گیرند و جبر مقدماتی و هندسه مسطحه را در دبیرستان می‌آموزند. شاید افزارساز بیش از این ریاضیات نیاموزد و آهنگساز همه آموخته‌های جبر و هندسه‌اش را بسرعت ازیاد ببرد. با این همه، هر دو نفر آن قدر از حساب به یاد دارند که بتوانند محاسبات معمولی لازم را در وام گرفتن پول، به کارگیری دستورالعملها و کارهای دیگر انجام دهند و چه بسا افزارساز از هندسه مقدماتی در حرفه‌اش یاری جوید؛ اما آنها نقش اندکی در انتقال سنت ریاضی در فرهنگشان خواهند داشت؛ یعنی در حد نقشی که هر پدر و مادری در آموزش شمارش به فرزندانشان و کمک در انجام دادن تکالیف مدرسه‌شان دارند. برداشت آنها از ریاضیات را می‌توان شکل جدیدی از همان برداشت بابلیان باستان و شمارشگران مصری دانست که ریاضیات را چونان مجموعه قواعدی برای رویارویی با مشکلات کمّی ناشی از کارهای روزمره می‌پنداشتند.

عنصر اصلی ریاضی در فرهنگ، یعنی تبلور بخش عمده‌ای از ریاضیات زنده و بالنده در درجهٔ اول از آنِ ریاضیدانان حرفه‌ای است. آری، درست است که بیشترین انتقال سنت ریاضی از طریق برخی از رشته‌ها چون مهندسی، فیزیک و شیمی، که ریاضیات بسیار به کار می‌برند، صورت می‌گیرد و رشد عنصر ریاضی در فرهنگ نیز به دست پژوهشگران چنین علومی رخ می‌دهد؛ اما وجود عنصر ریاضی فرهنگ و رشدش وابسته به طبقه ریاضیدانهاست.

باری، چنانچه ما ریاضیات را با عناصر فرهنگیی چون زبان، مذهب و لباس بسنجیم به تفاوت چشمگیری برمی‌خوریم؛ زیرا با اینکه این عناصر با نمودهای مختلفشان عموماً به گروههای ناحیه خاصی تعلق دارند، به نظر می‌آید که ریاضیدانهاجهان شمولند و هیچ مرزی نمی‌شناسند. در قرن حاضر رسم بر این بوده‌است که هرچند سال یک بار کنفرانسهای بین‌المللی ریاضی برپا شود. در این کنفرانسها می‌بینیم که ریاضیدانهانمایانگر زبان، لباس، مذهب و عقاید سیاسی مختلف‌اند. اما ریاضیدان روسی، آلمانی و آمریکایی از نظر جبر و حساب یکسانند و توپولوژیست ژاپنی و آمریکایی، توپولوژی واحدی دارند. اختلاف آنها بیشتر در جزئیات نظریه‌های جدید است تا در اجزای معلوم موضوع مورد اشتراکشان. ظاهراً این جهانشمولی ریاضیدانهایکی از ویژگیهای ممتاز درمیان عناصر مختلف فرهنگی است؛ اما با بررسی دقیقتر خواهیم یافت که:

۱) این جهانشمولی همواره موجود نیست؛
۲) چنانکه می‌نماید چندان کامل نیست و
۳) وجودش به آسانی در دوره‌های فرهنگی تبیین شده است.

۳. جایگاه تاریخی ریاضیات

اگر وضعیت ریاضیات را در فرهنگهای مختلف عصر مسیح (ع) با وضع کنونیش بسنجیم، تفاوت بسیاری می‌یابیم. در فرهنگ یونانی، هندسه و شیوه‌های منطقی و دیالکتیکی وابسته به آن از عناصر اصلی ریاضیات به شمار می‌آمدند. آنها شبیه نظام عددی و جبریی بودند که نمادهای اصلیشان از فرهنگهای سومری و بابلی سرچشمه می‌گرفت که امروزه تقریباً از یاد رفته‌اند. رومیان به تأثیرپذیری از ریاضیات یونانی، نظام ویژه‌ای برای نوشتن اعداد داشتند که از نظام حساب یدی یونانی بسیار پیچیده‌تر بود و هنوز هم در صفحات عنوان مقبره‌های تاریخی، و دیگر مکانهای دورافتاده باقی است. از سوی دیگر، در فرهنگ چینی هندسه یونانی شناخته شده نبود. ریاضیات چینی اصولاً عبارت بود از محاسبات عددی و حل معادلات جبری. اگرچه به نظر می‌رسد تماسهایی میان تمدنهای غربی و شرقی از دوران نخستین مسیحیت به بعد رخ داده، اما تقریباً تا دورانهای معاصر فقط در موارد اندکی اندیشه‌های ریاضی از یکی از این حوزه‌های فرهنگی به حوزه دیگر راه یافته‌است. در چین ظاهراً عناصر هندسی غیرمنطقی و قاعده گونه هندسهٔ مصری پیش از یونانیان وجود داشته است؛ ولی اثری از هندسه منطقی و منظم ابداعی یونانیان برجای نبود. ریاضیات چینی به همراه دیگر عناصر فرهنگ چینی به ژاپن انتقال یافت و در آنجا به رغم آشنایی احتمالی با متون قرن هفدهم اقلیدسی به زبان چینی، در همان مسیر سنتی‌اش ادامه یافت. ما در قرن هفدهم و هجدهم ریاضیدانهایی را در چین می‌یابیم که به حل معادلات درجهٔ ۳۰۰۰ و ۴۰۰۰ می‌پرداختند! ژاپن تا پیش از اصلاحات سال ۱۸۶۸ که زمان آغاز سرازیرشدن ریاضیات و دیگر عناصر فرهنگی اروپایی است، در برابر جذب اندیشه‌های ریاضی غربی سخت مقاومت می‌ورزید.

از سوی دیگر، اوضاع و احوال حوزه مدیترانه در دوره رونق فرهنگ یونانی و قرنها پس از آن به‌گونه‌ای بود که رشد منظمی در جبر صورت نگرفت، تا اینکه ریاضیات هندسی ـ عربی (و نظام شمارشی که امروزه جهانی شده است) به همراه هندسه یونانی به‌دست اعراب حفظ، و به آفریقا، اسپانیا و ایتالیا منتقل شد.

اغلب تعیین اینکه چرا عنصری از یک فرهنگ به رغم سودمندیش برای یک فرهنگ دیگر از سوی آن فرهنگ پذیرفته نمی‌شود، بسی دشوار است؛ چنانکه به‌قول سارتون، نظام متریک به رغم سودمندیش برای عناصر صنعتی فرهنگ انگلیسی از سوی این فرهنگ پذیرفته نشد. اتفاقاً سارتون این مثال را در تأیید این رأی می‌آورد که ریاضیات همواره به دلیل «اقتصادی» به وجود نمی‌آید، بلکه تعیّن آن تا حد بسیاری به عوامل «درونی» فرهنگ بستگی دارد. البته اگر فقط بُعد اقتصادی فرهنگ در نظر گرفته شود، حق با سارتون است؛ اما با استناد به جنبه‌های مختلف «درونی» و «بیرونی» فرهنگ انگلیسی می‌توان در زمینه واقع‌شدن ابعاد اقتصادی در چنین فرهنگی تردید کرد. بی‌گمان عناصر دیگری در فرهنگ انگلیسی وجود داشت (شاید مانند غرور ملی و مقاومت در برابر نوآوریهای خارجی) که دامنهٔ آنها در برابر نظام متریک از جاذبهٔ عناصر صنعتی قوی‌تر بود.

این ملاحظات (و ملاحظات دیگری که به دلیل رعایت اختصار از بسیاری از آنها چشم پوشیدیم) به ما می‌آموزد که ریاضیات چیزی ذاتاً کلی، مطلق یا مقرّر شده نیست، بلکه تابع قوانین رشد و تأثیرپذیری از عناصر فرهنگی دیگر و به‌طور کلی بیشتر متأثر از علوم و فنون است. البته، انتظار نداریم که رشد ریاضیات تحت تأثیر فرهنگ دقیقاً چون رشد عناصر فرهنگی دیگر باشد، بلکه بیشتر انتظار داریم ببینیم که افراد گوناگون به شیوهٔ واحدی در برابر محیط خود واکنش نشان دهند. این رشد تا حدی به ماهیت ریاضیات و تا حدی هم به موقعیت آن در مجموع فعالیتهای انسانی وابسته است؛ درست به همان‌گونه که رشد شخصیت انسان، هم به ویژگیهای ذاتی و هم به موقعیت او در جامعه و فرهنگش بستگی دارد.

۴. وضعیت کنونی ریاضیات

به‌نظر می‌رسد ریاضیات کنونی برخلاف وضعیت تاریخی مذکور، از موقعیت یگانه‌ای برخوردار است. هرچند ریاضیدانها با «زبانهای طبیعی» مختلفی پیرامون جهان خود سخن می‌گویند، اما زبان ریاضیشان عملاً جهان شمول است. از این رو، یک نفر اهل جبر و حساب می‌تواند مقاله‌ای مربوط به جبر را از مجله‌ای که در هر جای دنیا منتشر می‌شود، برگزیند و پس از عبور از مانع زبان طبیعی به همان مفاهیم و قاعدتاً نمادهای جبری برسد که خودش با آنها سروکار دارد. این امر به‌طور کلی درمورد هر شاخه‌ای از ریاضیات صدق می‌کند (اگر چه در یک شاخهٔ جدید معمولاً دوره‌ای وجود دارد که اصطلاحها اندکی آشفته و درهم است).

اما فقط ریاضیدانهای کشورهای مختلف نیستند که نمادها و اصطلاحهای متنوع به کار می‌برند، بلکه دیگر طبقات موجود در آن کشورها نیز چنین می‌کنند. اختلاف آرا معمولاً در مسیر پژوهشهای ضروری و حل مسائل مهم رخ دهد. این‌گونه اختلافها دست‌کم موقتاً به «نحله»های گوناگونی می‌انجامد که اساساً به

رغم داشتن فلسفهٔ واحدی دربارهٔ مبانی، از حیث موضوع و انتخاب روش مختلف‌اند، برای مثال ما بخوبی می‌دانیم که معمولاً راههای متعددی برای حل یک مسأله وجود دارد. درواقع، هنگامی که مسأله‌ای از راهی حل می‌شود، ممکن است راه‌حلهای فراوان دیگری یافت شوند که از راه‌حل نخست بسیار ساده‌تر و ابتدایی‌تر باشند. این راه‌حلهای ممکن می‌تواند از سوی گروههای مختلف مطرح شوند. چنانکه معمولاً احتمال می‌رود که پاره‌ای از راه‌حلهای هندسی را هندسه‌دانان پیشنهاد کنند و نیز اگر برخی از راه‌حلها ماهیتی جبری داشته و فاقد عناصر هندسی باشند، بی‌گمان از سوی ریاضیدانان متخصص در جبر مطرح می‌شود. یک نمونه از راه‌حلهای جبری بسیار چشمگیر در خصوص موضوع نسبتاً جدید توپولوژی، نظریه مجموعه‌ها بود که چند سال پیش «نظریه‌پردازان مجموعه» آن را به منزلهٔ یک روشی اساسی بر روش جبری دیگران ترجیح دادند (امروزه ترکیبی از هر دو روش رایج است).

همچنین انتظار یافتن اختلاف آراء در میان گروههایی که در مناطق جغرافیایی بسیار پراکنده زندگی می‌کنند، طبیعی است. درواقع، برخی از ریاضیدانها هنوز هم آشکارا از منش ملی برخوردارند. مدتها بود که ریاضیدانهای فرانسوی به‌نظریه تابع، انگلیسیها به ریاضیات کاربردی، آلمانی‌ها به مبانی و ایتالیایی‌ها به هندسه دلبستگی داشتند. امروزه غالباً از ریاضیدانهای آمریکایی اظهاراتی را می‌شنویم که حاکی از گرایش به خصلت انتزاعی ریاضیات است؛ گرایشی که به دلیل فراخوانی ریاضیدانهابه بررسی آثار جنگ در سال ۱۹۴۱ و سالهای پس از آن، اندکی از شتابش کاسته شده است.

باری، به رغم وجود چنین اختلافهایی (که عموماً برخاسته از تأثیر فرهنگی است)، ریاضیدانهارا می‌توان به دور از سایر فعالیتهای انسانی از روی جهان شمولیشان باز شناخت.

۵ـ ریاضیات از نظر فرهنگی چیست؟

پرسش «ریاضیات چیست؟» شاید مانند همه پرسشهای دیگری که دربارهٔ ویژگی بنیادی آن مطرح می‌شود، بسیار مورد توجه بوده است. با توجه به بحث چهارفصل اخیر احتمال نمی‌رود خواننده بپندارد که هر کسی می‌تواند پاسخی درخور و قاطع به این پرسش بدهد به‌طوری که مقبول عام افتد.

اما در اینجا باید این پرسش را مشخص‌تر کنیم تا بتوان نوع پاسخ و تعریف مورد نظر را معلوم کرد. معمولاً تعریف شرح‌الاسمی درخور پاسخ بدین پرسش نیست، بلکه به احتمال قوی پاسخ مورد نظر از نوع پاسخهای فلسفی است. در این پرسش، هم فیلسوفان و هم ریاضیدانهاپاسخهایی داده‌اند؛ اما هیچ کدام مقبول عام نیفتاده است. به‌نظر می‌آید که مشکل اساساً در این فرض نهفته است که ریاضیات ماهیتاً امری انتزاعی، و در تمام زمانها و مکانها ثابت است و بنابراین فقط هنگامی که نابغه‌ای تیزبین آن را دریافت و توصیف کرد در صحنه اندیشه انسانی آشکار و معین می‌شود. از آنجا که ریاضیات به‌گونه‌ای نیست که به وصف درآید (اگر چه شاید افراد عادی قرنها بپندارند که به وصف درمی‌آید)، هر کوششی برای توصیف آن نتیجه‌ای جز شکست دربی ندارد.

بنابراین آیا اساساً می‌توان به یک وجهی به این پرسش پاسخ داد؟ شاید این از آن پرسشهایی باشد که فقط با اشاره بتوان بدان پاسخ داد؛ یعنی با اشاره به شئ مورد تعریف در زمان و مکان خاص می‌توانیم بگوییم آن چیست؛ اما این مسئولیت را نمی‌پذیریم که همان شئ در زمان و مکان دیگری ظهور یابد. بدین‌ترتیب، می‌توانیم پاسخی درخور بدین پرسش دهیم که ریاضیات یونانی در یک قرن پیش از میلاد چه بود. بیشتر این ریاضیات یونانی تحول یافت و جزء چیزی شد که امروزه ما آن را ریاضیات می‌نامیم؛ گویی نباید پنداشت که ریاضیات از خصلت زمانبندی برخوردار نیست و جاویدان است، چنانکه بسیاری چنین پنداشته‌اند: زیرا بخش اعظم این ریاضیات که زمانی پذیرفته شده بود، بعداً ردّ شد؛ یعنی دیگر ریاضیات محسوب نمی‌شود و ویژگیش بکلی دگرگون شده است. هرچند از دید سطحی هندسهٔ یونانی هنوز هم بخشی از ریاضیات به‌نظر می‌رسد، اما دقیقاً چنین نیست. در فرهنگ یونانی می‌پنداشتند که هندسه، هم توصیفی آرمانگرایانه از فضای واقعی است که پدیدارهای طبیعی ما را به چنین توصیفی واداشته، و هم آموزه‌ای است که فلسفهٔ مطلق و مسلّم بدان حکم می‌کند. در حالی که در فرهنگ ما چیزی مشابه آنچه یونانیان هندسه‌اش می‌خواندند، تنها یکی از چندین هندسه همبود است که هر کدام فقط مظهر یک معنای خاصی از ریاضیات‌اند. هندسه در شکل جدید اصل موضوعی‌اش با آنچه یونانیان آن را هندسه می‌دانستند بکلی فرق می‌کند؛ بنابراین دیگر نمی‌توان گفت هندسه یونانی، ریاضیات را می‌سازد، چنانکه دیگر نمی‌توان گفت از نظر تکاملی جدّ انسان وجود دارد، مگر از طریق خَلَفش، یعنی انسان جدید و کنونی ماجرای مفهوم عدد نیز چنین است.

پرسش «ریاضیات چیست؟» هنگامی می‌تواند پاسخی خرسند کننده بیابد که منظور از طرح آن یافتن معیاری باشد که بتوانیم با آن معیار، میان عناصر ریاضی و غیر ریاضی فرهنگ تمییز دهیم. باید به یاد داشته باشیم که در طولِ تاریخ هرگاه بشر تفاوتهایی را میان پاره‌ای از فعالیتها تشخیص می‌داد، فرصت را مناسب می‌یافت تا برای تمییز آنها از هم «نامهایی» بدانها نسبت دهد و سپس سرانجام از نظر فلسفی باور می‌کرد که آن نامها خود دارای محتوا و وجود قائم بذاتند، آنگاه می‌کوشید تا دریابد که این محتوا چیست. این انتزاع همچون انتزاعهای دیگر دربارهٔ «ذهن»، «حیات» و «زیبایی» اغلب به دردسرهای فلسفی انجامیده است. در آغاز واژه‌ای که ربطی به ریاضیات داشته باشد، وجود نداشت؛ زیرا نخست می‌بایست چیزی وجود می‌داشت تا ریاضیات نامیده می‌شد. در فرهنگهای بدویی که ریاضیات فقط به صورت اَشکال ساده‌ای از شمارش بود، از نام ریاضیات خبری نبود.

چرا ما عناصر ویژه‌ای از فرهنگهای یونانی و چینی را از دیگر عناصر آن فرهنگها جدا می‌کنیم و آنها را ریاضیات می‌نامیم؟ به‌طور کلی چه چیزی ما را قادر می‌سازد تا به سوی فرهنگی برویم و عناصر «ریاضی» آن را برگزینیم؟ بی‌گمان معیار ما برای این کار چیزی است که در فرهنگ خود آن را ریاضیات می‌نامیم. از همین رو، همهٔ امور عددی، هندسی و جبری فرهنگ کهن را با هم تحت عنوان ریاضیات قرار می‌دهیم؛ اما آنچه را که ریاضیات می‌نامیم احتمالاً در یک فرهنگ کهن باید نامی چون نامهای «اخترشناسی» و «الهیات» در زبان، داشته باشد. ما به ناچار در تعیین عناصر ریاضی فرهنگهای دیگر از «چیزی که آن را ریاضیات

می‌خوانیم تأثیر می‌پذیریم و خط می‌گیریم». درنتیجه می‌توان پرسش مذکور را دقیق‌تر و بدین‌گونه مطرح کرد که «چه عناصر فرهنگیی در جهان امروز ریاضیات نامیده می‌شود؟» (قید در جهان امروز به دلیل شمولش ما را از قیود دیگری چون «در آمریکا» یا «در فرانسه» بی‌نیاز می‌کند؛ یعنی نیازی نیست که بگوییم در دنیای متمدن ریاضیات به چه چیزی می‌گویند).

یکی از راههای مطمئن ولی «غیر عملی» برای پاسخ به پرسش مذکور این است که از همه اطلاعات ریاضی عالم نسخه‌ای در یک کتابخانه گردآوریم و آنگاه در پاسخ بگوییم «امروزه ریاضیات این است».

قید «غیرعملی» را از این رو آوردیم که چنین گردآوریی غیرممکن است و گزینش آنها در بسیاری موارد بستگی به مذاق ویژهٔ گزینشگر دارد؛ برای مثال گفته مشهور کرو نکر (Kronecker) را در خصوص استدلالی که لیندمن (Lindemonn) در مورد استعلایی (غیر تجربی) بودن عدد π ارائه کرده به یاد آورید. هنوز هم شگفت نیست که بشنویم ریاضیدانی کار ریاضیدان دیگری را با گفتن اینکه «این ریاضیات نیست» تحقیر کند. وضع آن گزینشگر به وضع جانورشناسی می‌ماند که از او خواستند تا معلوم کند فلان بافتهای خاص «حیوانند» یا «جاندار»؛ بنابراین موارد «بینابین» به تنهایی بیانگر ناممکن بودن کار گزینش است. بهترین کاری که می‌توان انجام داد این است که برخی از موارد را در بخشی بنهیم که با علامت پرسش یا عبارت «بعضاً ریاضی است، نه کلاً» مشخص شده‌اند.

کتاب تاریخ ریاضیاتِ منتوکلا (Montucla) منتشر شده به سال ۱۷۵۸، نمونهٔ تاریخی جالب توجهی در این مورد است. منتوکلا ریاضیات را به دو بخش تقسیم می‌کند: یکی «مقایسهٔ امور انتزاعی محض» و دیگری موسوم به «ریاضیات مرکب» یا به زبان ساده‌تر «فیزیک ـ ریاضی». بخش نخست با اموری سروکار دارد که ما امروزه احتمالاً آن را «ریاضیات محض» می‌نامیم و بخش دوم دربارهٔ مفاهیمی است که می‌توان آنها را در قالب اصطلاحات ریاضی بیان کرد.

بدین‌ترتیب منتوکلا از موضوعاتی چون مکانیک، نورشناسی، اخترشناسی، طالع‌بینی قضایی، جهت‌یابی، جغرافیا و موسیقی بحث می‌کند. او برای ارزیابی دقیق بعضی موارد در کاربردها اقدام به ساخت رصدخانه، کشتی‌ها و مانند اینها کرد. وی برای توجیه گنجاندن چنین موضوعاتی تحت عنوان ریاضیات به سابقه‌داشتن چنین کاری در دوره‌های اولیه تاریخ ریاضیات یونان استناد می‌کند که موسیقی و فن گونیاکردن را (اگرچه از جهتی منحصراً به هندسه اختصاص داشته است) در برمی‌گرفت. این «تقسیم‌کارِ» ناشی از رشد ریاضیات از زمان منتوکلا به بعد، نظر ما را دربارهٔ ماهیت مقوّم ریاضیات دگرگون کرده است.

اگر تاریخ ریاضیات منتوکلا را با تاریخ ریاضیاتی که در سالهای اخیر نگاشته‌شده بسنجید، به‌وجود چنین دگرگونیی پی خواهید برد. هرچند کتابهای تاریخ ریاضیات جدید هنوز هم اشاراتی جزئی به اخترشناسی دارد (زیرا بسیاری از ریاضیدانهای نخستین، کسانی بوده‌اند که ما امروزه همهٔ آنها را اخترشناس می‌خوانیم)، معمولاً هیچ بخش ویژه‌ای به اخترشناسی اختصاص نیافته است. با این همه، به‌رغم اینکه امروزه ما کلاسهای ویژه‌ای برای افرادی موسوم به «اخترشناس» داریم که «ریاضیات» برای ایشان به منزله یک

«ابزار» است نه یک پیشه، وجود «دپارتمانهای ریاضیات و اخترشناسی» در دانشکده‌های ما هنوز حاکی از آثار برجای مانده از فرهنگهای کهن است.

درواقع اگر تاریخهای نگاشته‌شده در پنجاه تا هفتاد سال پیش را با کتابی از دوران جدید بسنجیم، بسرعت می‌توانیم دریابیم که تحت عنوان «ریاضیات» چه موضوعات گوناگونی مطرح می‌شود؛ برای نمونه به تاریخهای بال (Ball) و کایوری (Cajori) بنگرید که اندکی پیش از سال ۱۹۰۰ نگاشته شده‌اند. در نخستین ویرایش تاریخ بال (۱۸۸۸) نامی از «منطق» ذکر نشده است؛ اما در ویرایش چهارم آن (۱۹۰۸) از جورج بول (George Bole) چنین یاد می‌شود که «وی یکی از واضعان منطق نمادین یا ریاضی است»؛ ولی در نمایهٔ این کتاب هیچ اشارهٔ دیگری به منطق به چشم نمی‌خورد. در نخستین چاپ تاریخ کایوری (۱۸۹۳) چهار نکته جزئی در مورد ماهیت منطق بیان شده است؛ اما در ویرایش دوم (۱۹۱۹) چهار صفحه (۴۷ ـ ۴۱۰) به مطالب مربوط به «منطق ریاضی» اختصاص یافته (که به دلیلی در نمایه نیامده) است. این کتابها را با کتاب «رشد ریاضیات» (چاپ ۱۹۴۰) بل (Bell) سنجید. در این کتاب، دست‌کم ۲۵ صفحه به بیان تحولات قرن حاضر در «منطق ریاضی» اختصاص دارد که کلیاتی از آن در فصلهای پیشین آمد. بدیهی است که منطق ریاضی قبلاً بخشی از ریاضیات محسوب می‌شد، هرچند امروزه تاحدی به منزله «کاربردی» از «ریاضیات» قلمداد می‌گردد. بازتاب دیگر این تحول را باید در نوشته‌های اخیر و نیز در این حقیقت جُست که امروزه برعکس، عموماً کسانی در دپارتمانهای ریاضی اشتغال دارند که کار اصلی‌شان پرداختن به منطق و آموزش درسهایی مشتمل بر بررسی تحولات ریاضی از رنسانس به بعد است.

ما ناگزیریم نتیجه بگیریم که نمی‌توانیم ریاضیات را چون گذشته به‌طور «مطلق» تعریف کنیم دگرگونیهای فرهنگی نشان داده است که تعریفهای مطلق ارزشی ندارند. چه بسا حساسیت داشتن به تعریف نشانهٔ ضعف و فرتوتی باشد.

۶ امروزه به چه چیزی ریاضیات می‌گوییم؟

شاید از مطالب مذکور روشن شود که ما نمی‌توانیم به پرسش «در جهان امروز ریاضیات چیست؟» پاسخی قطعی دهیم، بلکه حداکثر می‌توانیم پاسخی «تقریبی» دهیم. از دیدگاه فرهنگ شناسی، نخستین کار باید مشاهدهٔ اَعمال کسانی باشد که آنها را ریاضیدان می‌نامیم. از آنجا که ریاضیدانها همچون دیگران به کارهایی چون خوردن، آشامیدن، تفریح و مانند اینها می‌پردازند، باید مشاهده را محدود کنیم به کارهایی که این افراد به عنوان ریاضیدان انجام می‌دهند. آنان به عنوان ریاضیدان به بررسی قالبها یا ساختارهای انتزاعی می‌پردازند؛ برای مثال، درک عدد اصلی به منزلهٔ درک یکی از ویژگیهای ساختاری یک مجموعه است. چنانکه اگر بگوییم مجموعه چهار عضو دارد، سخن دربارهٔ ساختار آن مجموعه گفته‌ایم و نیز چنانچه بگوییم مجموعه به‌طور خطی ترتیب یافته، ویژگی ساختاری دیگری را بیان کرده‌ایم. به همین سان، عبارتهای توپولوژیکال یا هندسی، عبارتهایی دربارهٔ قالب یا ساختار یک مجموعه است. ما در جبر به تعیین روابط

میان عناصر یا زیرمجموعه‌های یک مجموعه و مانند اینها می‌پردازیم. نکته ظریف در توصیف کار ریاضیدانهای امروزی این است که کارشان شامل منطق ریاضی می‌شود که می‌توان گفت با صورت برهان یا استدلال انتزاعی سروکار دارد.

البته ما بی‌درنگ خواهیم پرسید که با این وصف چگونه می‌توان ریاضیات را مثلاً از هنر تمیز داد؛ هنر نیز با قالب یا ساختار سروکار دارد. پاسخ این است که ریاضیات به انتزاع قالب می‌پردازد و هنر به آن تشخّص می‌بخشد. ریاضیدان عدد انتزاعی چهار را درمی‌یابد؛ اما هنرمند فقط چهار پرنده، چهار گل و مانند آنها را ترسیم می‌کند. حتی به اصطلاح «هنر انتزاعی» نیز فرایندی از تشخّص بخشی را داراست. اتفاقاً بسیاری از ریاضیدانهاریاضیات را چون هنر می‌پندارند (برای نمونه، بنگرید به مقاله سالوان (J. s. n sullivan) و مقالهٔ شاو (J. B. shaw)، تجدید چاپ شده توس شاف schaaf). به نظر من هنگامی که قالبی را در نقاشی، شعر، موسیقی و مانند آنها درمی‌یابیم و آن را انتزاع می‌کنیم، کاری ریاضی انجام داده‌ایم. هیچ تعریفی از ریاضیات، حتی اگر منحصراً برای زمان حاضر به کار رود، برای حذف موارد بینابین کفایت نمی‌کند. محال است که با وضوح و اطمینان بگوییم درست همانجایی که ریاضیات از حرکت باز می‌ایستد، هنر، فیزیک یا مانند آنها آغاز می‌شود.

ساختارهای انتزاعی مربوط به ریاضیات را می‌توان به دوگونهٔ خاص به‌کار برد؛ یعنی درست همان‌گونه که «چهار» را در مورد چهار سنگ مرمر به‌کار می‌بریم و می‌گوییم «چهار سنگ مرمر»، یا هندسهٔ اقلیدسی را در مورد رشتهٔ مهندسی به‌کار می‌گیریم. در مورد ریاضیات نیز ما فقط عمل انتزاع را وارونه می‌کنیم و هیچ چیز مرموز دیگری در مورد کاربرد ریاضیات وجود ندارد (چنانکه برخی چنین پنداشته‌اند)؛ یعنی هر مفهومی را که از چیزی انتزاع می‌کنیم می‌توانیم دوبارهٔ به آن ارجاع دهیم. در حقیقت، بیشتر ریاضیات به اصطلاح کاربردی واقعاً ریاضیات (محض) است. هرچند ریاضیات کاربردی با ساختارهایی خاص مطرح می‌شود، اما ذاتاً مطالعه‌ای است در مورد ساختار انتزاعی. درحقیقت، حجم فراوانی از کارهایی که در فیزیک و موضوعات مربوط به آن صورت می‌گیرد و تا آنجا که با ساختارهای انتزاعی سروکار دارند، ریاضیات محسوب می‌شوند.

موارد بینابین دیگر از کاربرد روش اصل موضوعی ناشی می‌شود. آیا نظامی چون نظام وودر (Wooder) که ژنها در آن به شکل اصلی موضوعی چیده شده‌اند، ریاضیات است یا زیست‌شناسی؟ گویی هم بتوان آن را مطالعه‌ای دربارهٔ ساختار انتزاعی، یعنی ریاضیات نامید، و هم به دلیل وجود اصطلاحات تعریف ناشده‌ای چون «اندام»، «سلول»، «ژن» در آن، که معنای زیست‌شناختی دارند، چه بسا بتوان آن را زیست‌شناسی (و ریاضیات کاربردی) خواند.

بنابراین، به نظر می‌رسد که توصیف ریاضیات امروزی به عنصر زنده و بالندهٔ فرهنگ که دارای مفاهیمی مربوط به ساختارهای انتزاعی و پیوند میان ساختارهاست، توصیفی بجاست. به همین سان، محتوای آن نیز متنوع و دستخوش عوامل فرهنگی است، چنانکه عناصر دیگر فرهنگی نیز چنین هستند، حتی نمادهایی که

برای بیان و بسط ریاضیات به کار می‌روند، معانی متفاوتی دارند. ممکن است نمادی برای ریاضیدان قرن نوزدهمی بیانگر یک چیز و برای ریاضیدان قرن بیستم، به دلیل تحول اندیشه ریاضی، بیانگر چیز کاملاً متفاوت دیگری باشد؛ بنابراین عنصر ریاضی فرهنگ ما در قرن نوزدهم چیزی کاملاً متفاوت با عنصر ریاضی فرهنگ امروزی است؛ هرچند بسیاری از نمادها همچنان یکسان باقی مانده است (برای نمونه به معانی متفاوت dy|dx از زمان لایب نیتس تاکنون توجه کنید). ممکن است مفاهیمی که ریاضیدان قرن نوزدهم آنها را مفاهیم ریاضی می‌خواند، امروز هم به همین نام خوانده شود؛ اگرچه بسیاری از آنها عملاً بخشی از ریاضیات امروزه نباشد. به بیان درست‌تر، ریاضی بودن این مفاهیم فقط بدین معناست که بخشی از ریاضیات مربوط به زمان و مکان خاصی را تشکیل می‌دهند.

۷. فرایند دگرگونی و رشد ریاضیات

یکی از توهّمات همیشگی افراد عادی دربارهٔ ریاضیات این است که ریاضیات نوعی «حقیقت» قطعی و دگرگون‌ناپذیر است که گزاره‌هایی چون ۴=۲+۲ از نمونه‌های آن است. به کرّات از آن روحانی محبوب قرن نوزدهم (که خطابه‌اش به گتیسبورگ، به نظر شنوندگان، سخنان مشهور لینکلن را در همان مجمع تحت‌الشعاع قرار داد) نقل شده که «ما در ریاضیات محض دربارهٔ حقایق مطلقی می‌اندیشیم که پیش از آواز دسته‌جمعی ستارگان بامدادی در علم خدا وجود داشتند و پس از سقوط آخرین میزبان درخشان آنها از آسمان نیز در علم خدا خواهند بود.» این بیانه‌ای است که ظاهراً از یک ریاضیدان، پیامبری مُلهَم می‌سازد. اورت (Everett) در همان خطابه این سخن را که «خداوند یک هندسه‌دان است» از «فرزانه‌ای باستانی» نقل می‌کند (احتمالاً آن فرزانه افلاطون است که گفت: «خداوند همواره هندسه می‌ورزد») و این عقیده‌ای است که بعدها اخترشناسی به نام جینز (jens) نیز همان را تکرار می‌کند.

ریاضیدانان حرفه‌ای نیز در ایجاد چنین توهّمی نقش دارند. از این رو، هاردی (G. H. Hardy) نوشت که «به نظر من احتمالاً هیچ فیلسوفی با ریاضیدانی که به طریق یا طرقی اعتبار ثابت و مطلق حقایق ریاضی را نپذیرد، همدلی نخواهد کرد. قضایای ریاضی یا صادقند و یا کاذب و صدق و کذبشان مطلق و مستقل از علم ما به آنهاست». به گفته هاردی «ریاضیاتی را که ما به تکلّف از "ابداعات" خود می‌پنداریم، فقط یادداشتهایی از مشاهداتمان است». به دیدهٔ او، اینها بخشی از واقعیت ریاضی بیرون از ماست که ما صرفاً آنها را «کشف یا مشاهده» می‌کنیم. بل نیز گفت: «قدرت شکست‌ناپذیر این عقیده در این است که نمی‌توان آن را اثبات یا ابطال کرد»، بلکه می‌توانست بگوید که ضعف گریزناپذیرش این است که هیچ تبیینی دربارهٔ ریاضیات به دست نمی‌دهد.

دربرابر، دیدگاه فرهنگی تبیین بیشتری دربارهٔ ریاضیات ارائه می‌دهد. از قرار معلوم استروک (D. J. Struik) در اِعمال چنین دیدگاهی سهیم است. او در مقدمهٔ تاریخش چنین پوزش آورده که به دلیل رعایت اختصار ناگزیر شد «اشاره‌ای اجمالی به جوّ کلی فرهنگی و اجتماعی رشد یا توقف ریاضیات یک دوره بکند.

ریاضیات از کشاورزی، تجارت، تولید، مهندسی، فلسفه، فیزیک و اخترشناسی تأثیر پذیرفته است. تأثیر هیدرودینامیک بر نظریه تابع و تأثیر فلسفه کانت و پیمایش بر هندسه، تأثیر الکترومغناطیس بر معادله‌های دیفرانسیل، تأثیر فلسفهٔ دکارت بر مکانیک و تأثیر فلسفه اسکولاستیک بر حساب را می‌توان تنها با چند جمله یا چند کلمه نشان داد؛ اما فهم رشته و محتوای ریاضیات فقط درصورت ملاحظه همهٔ عوامل تعیین کننده میسّر است». به نظر می‌رسد جکسون (D. Jackson) نیز با بیان اینکه «در طرح روان‌شناسی اجتماعی بیشتر از طرح روان‌شناسی فردی موضوع گیرای پژوهش دربارهٔ رابطهٔ میان پیشرفتهای ریاضی و آگاهیهای کلی دورهٔ پدیدآورنده آنها وجود دارد»، مشابه همین رأی را در ذهن داشت.

ریاضیات نیز بسان هر عنصر فرهنگی دیگر از طریق تحول و اشاعه رشد می‌کند. از تقارب مناسب اندیشه‌ها در ذهن فرد یا گروه، پاره‌ای از همنهادها و اندیشه‌های جدید پدید می‌آید. بدین ترتیب ما می‌توانیم سیر تحول مفهوم گروه انتزاعی را در نوشته‌های ریاضیدانهای قرن نوزدهم به همان طریقی پیگیری کنیم که با آن سیر تحول زیست‌شناختی را در آثار داروین و اخلافش و نیز نوشته‌های معاصرین پی می‌گیریم. هر پژوهشگر ریاضی نمونه‌های متعددی از قضایا و نظریه‌های جدیدی را می‌شناسد که به طور همزمان از سوی دو یا چند ریاضیدان اعلام شده است. اعلام همزمان قضایا و آراء کاملاً مشابهٔ اختراعهای همزمان است و هنگامی که اوضاع و احوال فرهنگی مناسب باشد حتماً چنین پدیده‌ای رخ می‌دهد. چنانکه (اشپنگلر spengler) نیز گفت: «وظیفه‌ای که ضرورت تاریخی مقرر کرده است به سود یا زیان فرد تحقق می‌یابد». رشد ریاضیات به سبب این نبود که نیوتنی، ریمانی یا گوسی به طور اتفاقی در برهه‌ای از زمان زاده شدند، بلکه ظهور ریاضیدانهای بزرگ ـ و نیز مسائل ریاضی ـ معلول اوضاع و احوال فرهنگیی است که به پرورش آنها انجامید در دورهٔ یونان درست مانند دوره‌ای که وایر شتروس (weierstrass) و کرونکر را به بار آورد، تحلیل‌گران و ریاضیدانهای بالقوهٔ بزرگی وجود داشتند؛ اما فرهنگ یونان فاقد عناصر لازم تحلیلی و جبری بود. البته نباید عظمت مردان بزرگ را کوچک شمرد، بلکه برعکس، باید به حال کسانی تأسف خورد که از داشتن فرصتی برای رشد استعدادهایشان محروم بوده و هستند. در واقع چه بسا مردان بزرگ هم، اگر با خود صادق باشند، وقتی که یک لوله‌پاکن بخاری را می‌بینند، خواهند گفت: «اگر شرایط غیر از این بود من هم همین کاره می‌شدم.

البته ما می‌پذیریم که ریاضیات بدون وجود «نبوغهای خلاّق» نمی‌توانست پیشرفت کند؛ اما همچنان بر این نکته تأکید می‌ورزیم که نوابغ نمی‌توانند در یک خلأ عقلی کار کنند و اینکه بدون محرکهای فرهنگی مناسب آنها هرگز شناخته نمی‌شوند. به گفتهٔ لینتن (Ralph linton)، انسان‌شناس آمریکایی، «نوابغ ریاضی فقط از آن نقطه از فرهنگ خود می‌توانند کار را ادامه دهند که قبلاً معرفت ریاضی بدانجا رسیده است». از این رو، اگر اینشتاین در قبیله‌ای بدوی که بیش از سه شماره نمی‌توانست بشمرد، زاده شده بود، نیازی که در طول عمرش به ریاضیات پیدا می‌کرد احتمالاً فقط او را به سوی ایجاد یک نظام ریاضی دهدهی مبتنی بر انگشتان دست و پایش هدایت می‌کرد.

چگونه شرایط «مطلوب» رشد ریاضیات فراهم می‌گردد؟ تا آنجا که به شرایط کلی فرهنگی و اجتماعی مربوط می‌شود می‌توانیم بگوییم در وهلهٔ اول ریاضیات فقط در فرهنگی که استعداد تقسیم کار را دارد امکان توسعه می‌یابد. بخش اعظم ریاضیات اولیه بر اثر نیاز هندسی به مقام کشیشی برای مقاصد مذهبی پدید آمد (اولین اثر ریاضی قابل ذکر در آمریکا ظاهراً دست مردان تربیت یافته مسیحی بود که می‌خواستند تقویم سالیانه عید پاک را محاسبه کنند)؛ اما روند شمارش بسیار زودتر از این شروع شد و در همهٔ فرهنگهای بدوی یافت می‌شود (این واقعیت را می‌توان دلیلی به نفع شهودگرایان دانست که بر فرایند شمارش چونان پایهٔ مناسبی برای کل ریاضیات تأکید می‌ورزند). همین که نیاز به کشاورزی، مذهب، کشتی‌رانی و غیره پدید آید، ابزارهای ریاضی جدید نیز خلق می‌شوند. پیدایش اصول اولیه هندسه در مصر قدیم گواهی بر این مطلب است. چایلد (childe)، انسان‌شناس انگلیسی، در تفسیری در بارهٔ قواعد ریاضی و هندسی مورد استفادهٔ منشیان سومری (مدلهای اصلی و حقیقی قوانین کمّی علوم جدید) می‌گوید: «به نظر لازم نمی‌آید که ما برای یافتن نام کاشفان این قوانین خود را به زحمت اندازیم. بسیار واضح است که آنها ثمرات بسیار بارز اجتماعی‌اند که بر اثر نیازهای یک جامعهٔ متأثر از تحولات شهری پدید آمده‌اند و به کمک ابزارهای معنویی کشف می‌گردند که تحول آنها را ساخته است. به نظر می‌رسد این نکته نیازی به ذکر شواهد تاریخی فراوان نداشته باشد.

در وهلهٔ دوم، به دو دلیل باید یک نماد پردازی کافی وجود داشته باشد:

۱ ـ زیرا همهٔ فعالیتهای انسان، جز آن دسته از فعالیتهای کلی حیوانی چون خوردن و خوابیدن، مبتنی بر نمادپردازی است و نمادپردازی برای پرداختن به ریاضیات که ماهیتی انتزاعی دارد، شرط اساسی است.

۲ ـ نمادها ابزارهای ارتباط و اشاعه اندیشه‌های ریاضی است. لازم نیست به ریاضیدانان بقبولانیم که:

۱ ـ در واقع، بیشتر کار ریاضی بررسی ساختار و نظامهای نمادین مناسب است.

۲ ـ نمادپردازی تا حد زیادی سبب خصیصهٔ جهانشمولی ریاضیات امروزه است.

در وهلهٔ سوم، و افزون بر موارد مذکور، برای اشاعه اندیشه‌های ریاضی باید ابزارهای مناسب فراهم باشد. اگر قرار است در شرایط مناسب فرهنگی جوامع مختلف، اندیشه‌های ریاضی از جامعه‌ای به جامعه‌ای دیگر اشاعه یابد، ابزارهای مناسب انتقال نیز باید ساخته شود. ریاضیات یونانی و چینی در امتدادهای مختلفی بسط یافتند و دلیل عمده‌اش این بود که در آن دوران، اندیشه‌های ریاضی از فرهنگی به فرهنگی دیگر اشاعه نیافت. در دوران معاصر، ریاضیات با ابزارهای ارتباطی مناسب و از طریق ایجاد محله‌های ریاضی، دیوارهای اندیشمندان ریاضی از کشورهای خارجی، گرودهماییهای ریاضی بین‌المللی و غیره به خصیصهٔ عملاً جهان شمولیی کنونی دست می‌یابد. ریاضیات فقط با به کارگیری نمادها، و نه الزاماً با تملّک ابزارهای پیچیده یا دستگاههای پرهزینه، می‌تواند به جهانشمولی برسد؛ جهانشمولی‌ای که در رشته‌های دیگر چندان آسان به دست نمی‌آید. ریاضیات حتی با وجود چنین موانعی بر سر راه اشاعه که بعضاً برخاسته از تعارض سیاستهای بین‌المللی است، به طرز محسوسی، سبب ایجاد حوزه‌های مختلف فرهنگی در دوران

معاصر نشده است.

این امر مستلزم آن نیست که ریاضیات از نیروهای فرهنگی برخاسته از حوادث سیاسی و اجتماعی تأثیر نپذیرفته باشد. هجوم ریاضیدانهای فراری از فلسفه نازیسم و آزار و شکنجه‌های سالهای ۱۹۳۰ تا ۱۹۴۵ به آمریکا تأثیر فراوانی بر ریاضیات نهاد. تماسهای حاصل میان سران پیشتاز در رشته‌های تخصصی‌شان منجر به ترکیب اندیشه‌های ریاضی شد که تحقق چنین چیزی در شرایط جدایی فرهنگی ممکن نبود؛ اما از طرف دیگر، متأسفانه باید به از دست رفتن برخی از ریاضیدانهای برجسته و نیز فروپاشی گروههای مختلفی اشاره کرد که در کار پژوهشهای ریاضی فعّال بودند (مانند کوهینگن cohingen، وارسا warsaw).

۸ تفاوتهایی در نوع و کیفیت ریاضیات

باید بر این نکته تأکید کرد که از دیدگاه فرهنگی وجود تفاوتهایی چون تفاوتهای موجود میان ریاضیات چینی و یونانی در رشد اندیشه‌های ریاضی و نیز تفاوتهای ناچیز موجود میان ملتهای کنونی ناشی از «ماهیت» یا اوصاف ذاتی ریاضیدانها نیست، بلکه معلول فرهنگیی است که از آن پیروی می‌کنند. از نظر فرهنگی مردم فی‌نفسه یکسانند؛ اما از حیث فرهنگهایی که در آن زاده شده‌اند و از جهت نقشی که در تحول آن فرهنگها دارند، تفاوت می‌کنند. ریاضیدانهای یک فرهنگ خاص، دارای خرده فرهنگهای ریاضی‌اند که هم از اشاعهٔ فرهنگهای ریاضی دیگر تأثیر می‌پذیرند و هم از فرهنگ بزرگتر محیط بر آن فرهنگ خاص. چنانچه فرهنگ بزرگتر نیازهایی چون نیازهای برخاسته از توسعهٔ علمی، نظامی و صنعتی درآمریکا پدید آورد، خرده فرهنگ نمی‌تواند از این تأثیر برکنار بماند. از این روست که می‌بینیم ریاضیدانهای کنونی روی کامپیوترهای بسیار سریع و کاربردهای مختلف ریاضیات پژوهش می‌کنند (که این خود بالضروره مایهٔ پیدایش مفاهیم جدیدی شده است)، وگرنه آنها می‌بایست درپی توسعهٔ رشتهٔ دیگری از ریاضیات باشند.

نیازهای فرهنگی یا ویژگیهای مذهبی، فلسفی، کشاورزی، دریایی، صنعتی و ریاضی فرهنگ، جهت ریاضیات را در آن فرهنگ تعیین می‌کنند. جهتهای مختلف ریاضیات یونانی و چینی را شرایط اصلی فرهنگیی تعیین کرده بود که در طول دوران پیش از تاریخ آنها در فرهنگشان غلبه یافته بود. خرده فرهنگهای ریاضی با پذیرفتن یک فشار و نیروی اولیه بدون تردید در راستای معینی به حرکت خود ادامه می‌دهند و اصولاً تحت تأثیر عوامل تکامل‌بخش (چنانکه در ریاضیات چینی این طور بود) یا بر اثر عوامل تکامل‌بخش و اشاعه دهنده (بخشهای دیگر فرهنگ عمومی بویژه فلسفه درمورد ریاضیات یونانی) جریان می‌یابد.

امروزه ریاضیات تحت تأثیر مجموعه‌ای از عوامل تکامل‌بخش و اشاعه‌دهنده رشد می‌کند. بسیاری از مؤلفان بر آزادی ریاضیدان در انتخاب جهت تحقیقش تأکید می‌ورزند. ما بی آنکه بخواهیم مانند اشپنگلر بگوییم «آزادی برای انجام دادن ضرورت...»، با این حال می‌پذیریم که فقط آن دسته از ساختارهای ریاضی می‌توانند پویا و زنده بمانند که سودمندی نتایج خود را در ارتباط با رشد تکاملی ریاضیات به اثبات برسانند؛

برای مثال حرفه خلاّق ریاضیات برای وضع نظامهای اصل موضوعی دلخواسته‌ای که نسبت به رابطه‌شان با نظامهای موجود بی‌اهمیتند، ارزشی قائل نیست.

اهمیت نظریه یا مسأله در ریاضیات نیز همین طور تعیین می‌شود؛ یعنی بر مبنای رابطه‌شان با رشد تکاملی ریاضیات؛ اما چیزی که امروزه (به دلیل عدم ارتباط با ریاضیات موجود) ریاضی محسوب نشود، ممکن است روزی ریاضیات به شمار آید.

ما قبلاً از پاره‌ای از ابزارهای اشاعه ریاضیات ـ چون نشریات، گردهماییهای بین‌المللی، مهاجرت ریاضیدانها بر اثر فشارهای سیاسی و غیره ـ یاد کردیم؛ اما دربارهٔ ماهیت عوامل تکامل‌بخش چندان سخنی به میان نیاوردیم. مشکل این عوامل این است که برخلاف عوامل اشاعه دهنده به آسانی قابل تشخیص و اشاره نیستند؛ اما منطقی است که انتظار داشته باشیم وقتی رشته جدیدی از ریاضیات، که زمینه حاصلخیزی را برای تحقق عرضه می‌کند. در ذهن تعداد قابل ملاحظه‌ای از ریاضیدانها پدید آید، با صرف نظر از ویژگیهای فردی آن ریاضیدانها، در مسیر مشخصی رشد کند شاید وقوع بیشتر تداخل نتایج و بروز فعالیتهای بسیار شورانگیزی که در پی ضعف علاقهٔ قبلی پدید می‌آید ناشی از حل مهمترین و جالب توجه‌ترین مسائل یا ناشی از جذب یک رشته ریاضی در رشته‌ای جدیدتر و فراگیرتر باشد. سرانجام ممکن است اقلیت پراکنده‌ای از ریاضیدانها در رشته اصلی باقی بمانند و اکثر ریاضیدانهای جوانتر به رشته‌هایی بپردازند که با نظریه‌های جدیدتر سروکار دارند.

توجه می‌کنید که چگونه این فرایند شبیه فرایند «سبکها» یا «مُد»هاست. مُدهای گوناگونی در ریاضیات پدید می‌آیند و رشته‌ای از آن را پی می‌گیرند که با مُدهای موجود در بخشهای دیگر فرهنگ متفاوتند. یک ریاضیدان اوایل این قرن احتمالاً از ریاضیات امروزه منزجر می‌شد. البته ابراز انزجار از موضوع و روشهای ریاضیات نوین از سوی ریاضیدانی که در رشد سریع ریاضیات تحلیلی کلاسیک نقش داشت، غیرمنتظره و عجیب نیست. چنانکه در حوزه‌های دیگر امور انسانی نیز بزرگتران مدهای جدید مورد پسند جوانتران را تأسف‌بار می‌دانند؛ سرزنش کردن جوانان به دلیل دگرگون کردن مُدها نباید بیشتر از گله و شکایتی باشد که شوهران به دلیل تغییر مد لباس از همسرانشان می‌کنند. کروبر (Krober) اثبات کرده است که مُدها دوره‌های مشخصی دارند و به هر حال دگرگونیها تابع هوی و هوس طراحان مد (که چون منشیان سومری «ثمرات بارز اجتماعی‌اند») نیست. ممکن است از اکنون تا دو هزار سال دیگر در تاریخ ریاضیات، دوره‌ها مشابه هم به نظر آیند (هرچند ما از سر عادت ریاضیات را یکی از کهن‌ترین ساخته‌های دست انسان می‌پنداریم، اما رشد سریع ریاضیات بر اثر عوامل تکامل‌بخش و اشاعه‌دهنده مشخصاً رشد جدیدی است). شاید این نوع ریاضیات انتزاعیی را که ریاضیدانهای جدید فرض کرده‌اند ناشی از فشاری باشد که از سوی نوعی بسیار شبیه به ریاضیات تحلیلی کلاسیک بویژه به دلیل نیازمندی ریاضیات به رشته‌های دیگر دانش وارد آمده باشد. اکنون نشانه‌هایی وجود دارد که احتمالاً چنین چیزی در کاربردهای منطق ریاضی، روشهای اصل موضوعی، جبر مدرن، توپولوژی و غیره و بویژه در علوم اجتماعی مورد داشته باشد. هنگامی که تحلیل

کلاسیک در فیزیک، شیمی و سایر علوم طبیعی به کار رود و درواقع ریشه بدواند، ریاضیات جدید و مفاهیم آن نیز می‌تواند در علوم اجتماعی کاربرد بیابد. چنین گسترشی فقط با این دیدگاه می‌سازد که ریاضیات، خرده فرهنگی از یک فرهنگ عام است که بر اثر حرکت تکاملی خود از درون و نیز تحت تأثیر عواملی، گهگاه پنهان، از بیرون رشد می‌کند.

۹. موجود ریاضی

تأثیر دیدگاه فرهنگی بر موجود ریاضی چیست؟ برای مثال، این دیدگاه چه کمکی در روشن کردن مسأله ردّ مجموعه‌های نامتناهی از سوی کرونکر می‌کند. تا آنجا که چنین نگرشی مبتنی بر میل به پرهیز از تناقض ممکن، یا حتی مبتنی بر میل زیبایی‌شناختی به ایجاد ریاضیات با روشی غیر از روش اصول قطعی و یا غیره باشد، موجه به نظر می‌رسد و یا دست‌کم جایی برای استدلال باقی می‌گذارد؛ اما وقتی این نگرش بر پایه فلسفه‌ای شکل بگیرد (و غالباً هم چنین است) که ریاضیات را موجودی ذهنی یا ماهیتی انتزاعی می‌داند که ما در صدد کشف آنیم ـ هرچند فیزیکدان یا مکتشف بیشتر در جستجوی داده‌های طبیعی است ـ غیر موجه می‌نماید؛ زیرا ریاضیات چون سایر امور فرهنگی محصول تلاش جمعی انسانهاست که در مسیرهای تکامل و اشاعه پیش می‌رود و ماهیت آینده آن نیز با کشف «حقیقت ریاضی»ای که اکنون برما پوشیده است، مشخص نمی‌گردد، بلکه با چیزی روشن می‌شود که انسان آن را از طرق فرهنگی پدید می‌آورد.

بنابراین، اگر کشف تناقضات جدید یا اندیشه‌های مطلوبتر دیگر، دلیل کافی و تردیدناپذیری بر عدم کاربرد مجموعه‌های نامتناهی در ریاضیات باشد، به این علت نیست که آن مجموعه‌ها دیگر «وجود» ندارند، بلکه آنها همچون گذشته باقی خواهند بود؛ امّا فقط اموری ریاضی محسوب نمی‌شوند. همین امر در بارهٔ انتخاب اصل موضوع، «نظم و ترتیب خوب»، فرضیه‌های پیوستار و غیره نیز صادق است. حتی متصوّر است که شرایط سیاسی آینده احتمالاً به جدایی قطعی فرهنگها بینجامد، به طوری که مثلاً فرهنگی بیشتر مطالب ریاضیات کلاسیک چون نظریه مجموعه کانتور را رد کند ـ که چنین چیزی در صورت پذیرش فلسفهٔ شهودگرایی در سطح وسیع محتمل است ـ در حالی که فرهنگ دیگری در امتداد اندیشه ریاضیی چون اندیشه ریاضی کنونی آمریکا پیش رود؛ بنابراین دیگر این پرسش مطرح نیست که ریاضیات الف درست است یا ریاضیات ب؛ زیرا هر دوی آنها ساخته فرهنگند و دعوی صدق هیچ یک بر دیگری برتری ندارد.

به طور خلاصه، ریاضیات چیزی است که ما با عمل خود آن را پدید می‌آوریم؛ اما نه بدون توجه به امور تشکیل دهنده ریاضیات در فرهنگ خود، بلکه با تلاش برای ساختن نظریه‌های جدید در پرتو نظریه‌های قدیمی و با کوشش برای حل مسائل مهمی که معمولاً در نظر ما برای پیشبرد ریاضیات کنونی ارزشمند جلوه می‌کند. ریاضیات تا هنگامی که ما آن را نساخته‌ایم وجود ندارد و حتی با ساختن آن نیز ممکن است در برهه‌ای از زمان آینده دیگر ریاضیات محسوب نشود.